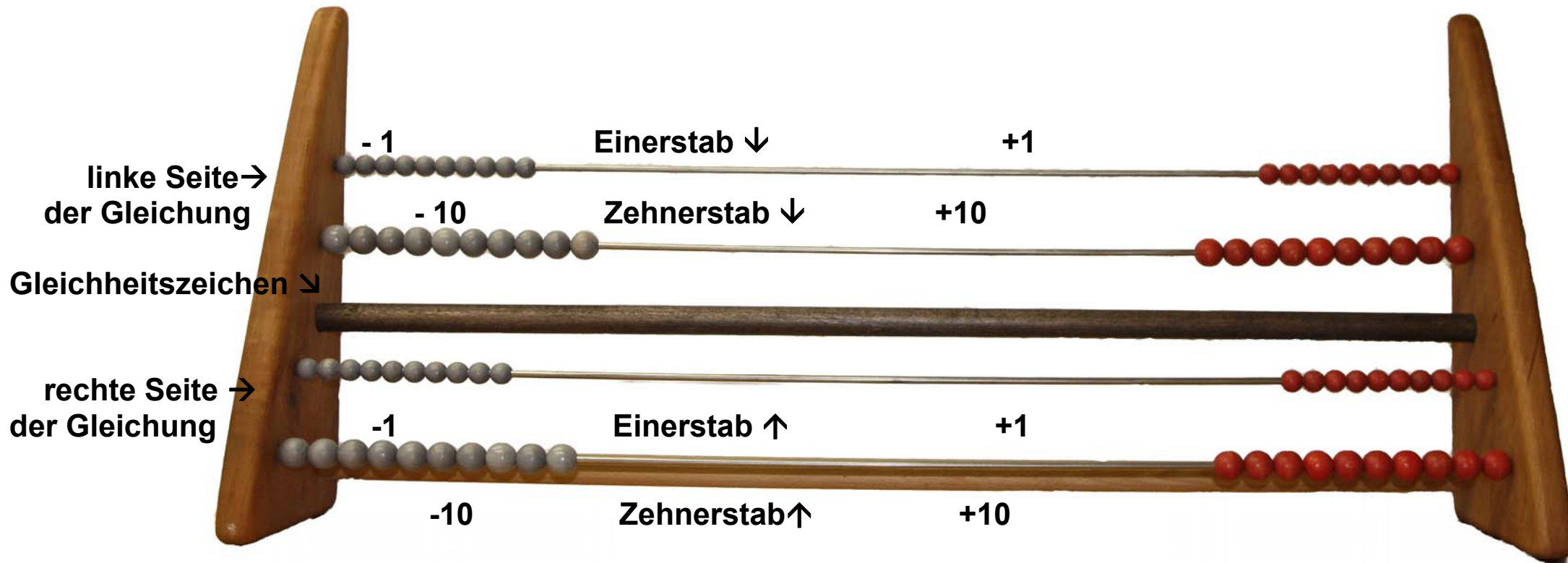


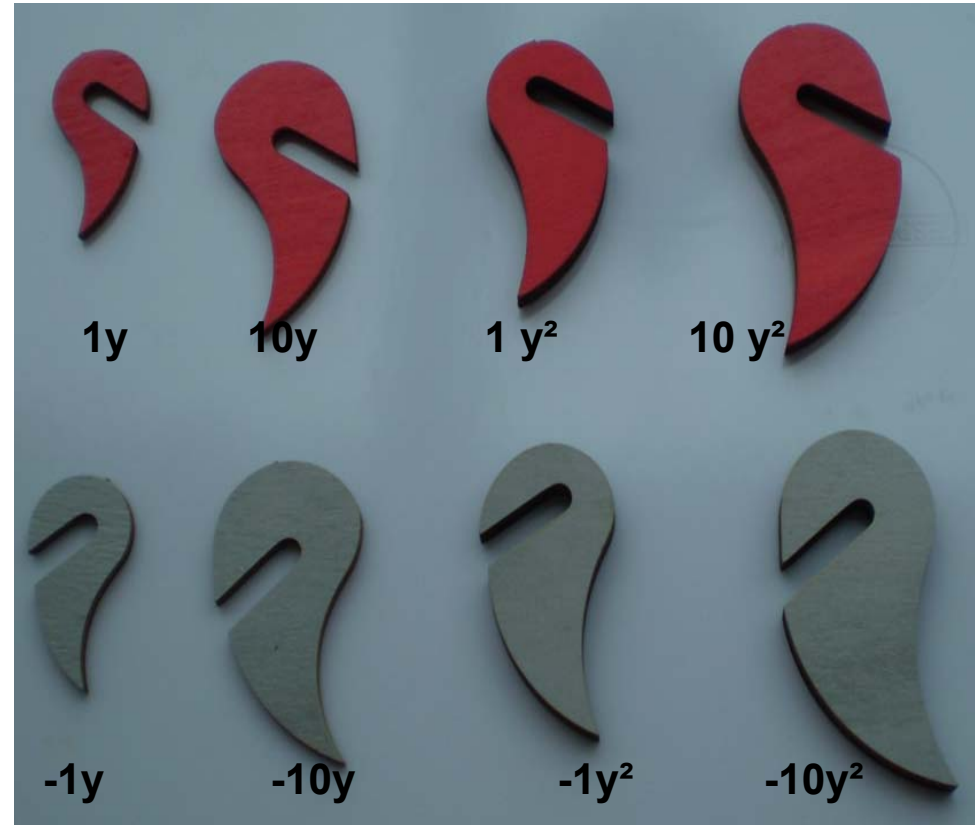
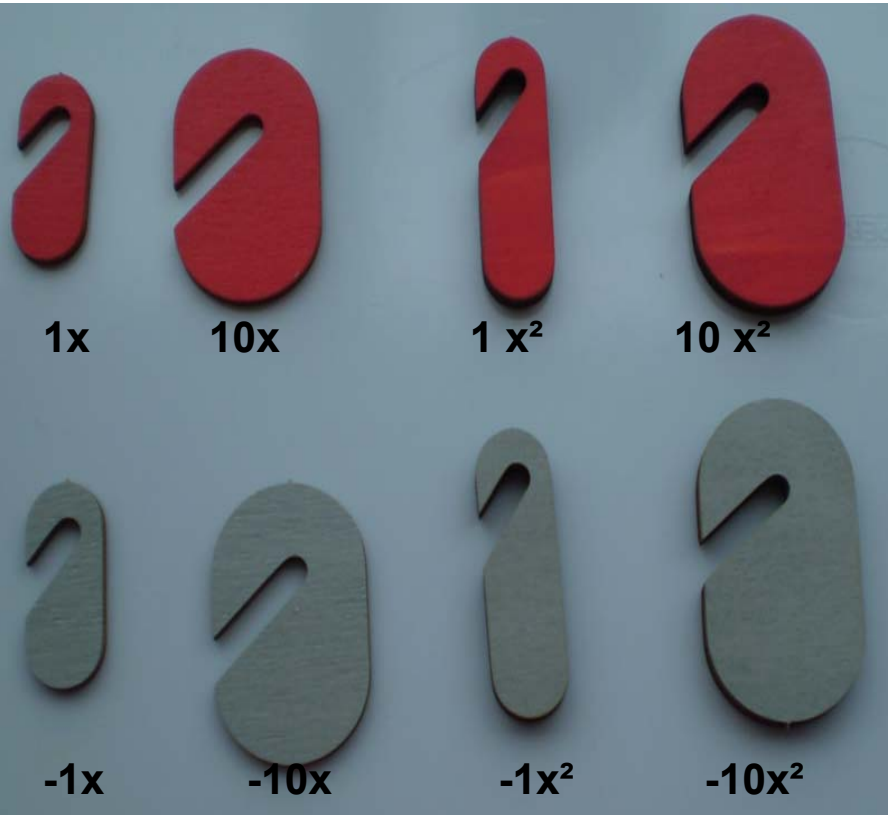
Anleitung für den Gleichungsrahmen



Mit den roten Kugeln und roten Variabeln werden Zahlen und Unbekannte mit positivem (+) Vorzeichen dargestellt. Die grauen Kugeln und grauen Variabeln werden für Zahlen und Unkannte mit negativem (-) Vorzeichen benutzt.

Der schwarze Stab fungiert als Gleichheitszeichen zwischen den beiden Gleichungsseiten.

In den Zubehörkästen sind zwei unterschiedliche Formen von Variabeln, die mit X und Y betitelt sind, aber beliebig einsetzbar sind für Unbekannte jeglicher Art, wie z.B. a, b, oder t. Die quadratischen Variabeln (x^2 / y^2) unterscheiden sich in Größe und Dicke von den anderen Variabeln.



Die Variabeln werden immer in die Mitte zwischen den roten und grauen Kugeln an den, dem Stellenwert entsprechenden Stab aufgehängt, damit eine unproblematische Bearbeitung der Therme möglich ist und man die Variabeln nicht ständig umhängen muß.

(Einervariabeln an den Einerstab und Zehnervariabeln an den Zehnerstab)

Folgende mathematische Grundsätze müssen beim Bearbeiten von Gleichungen beachtet werden.

1. Die Gleichung muss immer so umgeformt (verändert) werden, das zum Schluss eine Unbekannte (Variabel) alleine auf einer Seite der Gleichung steht, und das im günstigsten Falle mit einem positiven (+) Vorzeichen.
2. Wenn zur Umformung der Gleichung der Term auf einer der beiden Seiten durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division erweitert oder verändert wird, muss auch immer auf der anderen Seite die gleiche Erweiterung oder Veränderung erfolgen, damit das Gleichgewicht der Gleichung, wie bei einer Waage, immer unverändert bleibt. Das nennt man äquivalente Umformung.
3. Negative Zahlen und Variablen heben sich mit den gegengleichen positiven Zahlen und Variablen auf. Die Anzahl der Kugeln und Variablen muss dabei gleich sein.
4. Durch Tauschen der Terme von der linken zur rechten Gleichungsseite und umgekehrt, wandeln sich die Vorzeichen der Zahlen und Variablen. Aus Plus (+) wird Minus(-) und umgekehrt.
5. Punktrechnung geht vor Strichrechnung- bedeutet: das immer zuerst Multiplikations- und Divisionsrechnungen ausgeführt werden müssen, bevor Additionen und Subtraktionen bearbeitet werden. Beachte: das zwischen zwei Klammern, oder Zahlen und Unbekannten, die vor einer Klammer stehen, immer ein unsichtbares Multiplikationszeichen steht. Deshalb müssen solche Produkte immer zuerst ausgerechnet und zusammengefasst werden. Das nennt man: Auflösen der Klammer
6. Beim Auflösen von Klammern wird jeder Faktor in der Klammer mit dem Faktor vor der Klammer oder jeden Faktor der zweiten Klammer multipliziert. Beachte dabei, das positiver Faktor • positiver Faktor = positiver Faktor wird ($+$ • $+$ = $+$), negativer Faktor • negativer Faktor = positiver Faktor ($-$ • $-$ = $+$) ergibt. Positiver Faktor • negativer Faktor = negativer Faktor ($+$ • $-$ = $-$)

Mit diesem Rahmen kann man lineare Gleichungen und Gleichungssysteme mit bis zu zwei Unbekannten, bearbeiten.

Lineare Gleichungen mit einer Unbekannten (Variablen)

Beispiel: $4 + 2x = 10$

- **1. Schritt:** Gleichungsaufbau: $4 + 2x = 10$
Auf den Einerstab der linken Gleichungsseite werden in die Mitte zwischen den roten und grauen Kugeln **2** rote **X** aufgehängt und **4** rote, positive Einerkugeln dazu geschoben. Für die zweite Gleichungsseite wird nur **1** rote, positive Zehnerkugel in die Mitte geschoben.
- **2. Schritt:** Erweiterung der Gleichung (äquivalente Umformung)
Auf beiden Gleichungsseiten werden auf den Einerstäben nun je **4** graue, negative Einerkugeln dazu gegeben.
- **3. Schritt:** Vereinfachung
Nun heben sich auf der linken Gleichungsseite die 4 Einerkugeln **rot** und **grau** gegenseitig auf und werden zurückgeschoben. Es bleiben noch die **2** positiven **X** übrig. Auf der rechten Gleichungsseite muss die rote Zehnerkugel in **10** rote Einerkugeln umgetauscht werden. Nun kann man die **4** grauen, negativen Einerkugeln gegen **4** rote, positive Einerkugeln aufheben und ebenfalls aus der Gleichung entfernen. Somit bleiben auf der rechten Gleichungsseite **6** rote, positive Einerkugeln übrig.
- **4. Schritt:** Errechnen der Lösung für 1 **X**
Auf die **2** roten, positiven **X** der linken Gleichungsseite, werden nun die **6** roten, positiven Einerkugeln der rechten Gleichungsseite gleichmäßig aufgeteilt, um die Lösung für 1 **X** zu ermitteln. Dazu schiebt man auf dem oberen Einerstab die **2 X** auseinander und ordnet auf dem unteren Einerstab die Einerkugeln gleichmäßig unter jedem **X** an. So wird dann deutlich sichtbar, dass **1 X = 3** ist.
- **5. Schritt:** Probe zur Überprüfung der Lösung
Für **X** wird die Lösung **3** in die Ausgangsgleichung eingesetzt $4 + (2 \cdot 3) = 10$ und man erhält als Lösung **10 = 10**. Das ist eine wahre Aussage und somit stimmt die Gleichung.

Lineare Gleichungen mit einfachen Klammern

Beispiel: $7(x+1) = 6(x-1)$

- **Schritt:** Gleichungsaufbau: $7(x+1) = 6(x-1)$
Für den Aufbau wird die Klammer direkt ausmultipliziert (aufgelöst) und das Ergebnis dargestellt. Als Hilfestellung kann man sich das Ergebnis der aufgelösten Klammer notieren. Auf den Einerstab der linken Gleichungsseite werden in die Mitte zwischen den roten und grauen Kugeln **7** rote, positive **X** ($7 \cdot x = 7x$) aufgehängt und **7** rote, positive Einerkugeln ($7 \cdot 1 = 7$) dazu geschoben. Auf die zweite Gleichungsseite werden **6** rote, positive **X** ($6 \cdot x = 6x$) aufgehängt und **6** graue, negative Einerkugeln ($6 \cdot (-1) = -6$) dazu geschoben.
- **2. Schritt:** 1. Erweiterung der Gleichung (äquivalente Umformung) und Vereinfachung
Auf beiden Gleichungsseiten werden nun zuerst auf den Einerstäben **6** graue, negative **X** aufgehängt. Dann heben sich auf beiden Seiten je **6** rote, positive **X** und **6** graue, negative **X** auf und werden abgehängt. Es bleibt noch **1** rotes, positives **X** auf der linken Gleichungsseite übrig.
- **3. Schritt:** 2. Erweiterung der Gleichung (äquivalente Umformung) und Vereinfachung
Auf beiden Gleichungsseiten werden auf den Einerstäben **7** graue, negative Einerkugeln dazu gegeben. Somit heben sich auf der linken Gleichungsseite die 7 Einerkugeln **rot** und **grau** gegenseitig auf und werden zur Seite geschoben. Auf der rechten Gleichungsseite addieren sich die **6** und **7** grauen, negativen Kugeln zu **-13**.
- **4. Schritt:** Lösung für **1 X**
X = - 13
- **5. Schritt:** Probe machen zur Überprüfung der Lösung
Für **X** wird die **-13** in die Ausgangsgleichung eingesetzt $7(-13 + 1) = 6(-13 - 1)$ und man erhält als Lösung $-84 = -84$. Das ist eine wahre Aussage
(Probe kann schriftlich, oder auch mit dem Rahmen berechnet werden)

Lineare Gleichungen mit Produktklammern, binomischen Klammern und quadratischen Variablen

$$\text{Beispiel: } (x+3)(x-5) = (x-3)^2$$

- **1. Schritt:** Gleichungsaufbau: $(x+3)(x-5) = (x-3)(x-3)$
Auf beiden Seiten der Gleichung die Klammern auflösen und das Ergebnis auf dem Rahmen darstellen. Wenn nötig sollte man sich die ausmultiplizierten Terme notieren.
 $x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 3x - 3x + 9$
- **2. Schritt:** Vereinfachung der Gleichung
Nun alles zusammenfassen was gleiche Vorzeichen hat bzw. was sich gegeneinander aufhebt. Auf der linken Gleichungsseite heben sich je 3 rote, positive x und 3 graue, negative x auf. Übrig bleibt auf beiden Seiten folgender Term: $x^2 - 2x - 15 = x^2 - 6x + 9$
- **3. Schritt:** 1. Erweiterung der Gleichung/äquivalente Umformung
Nun müssen Schritt für Schritt alle Terme ohne Variablen auf die eine Seite gebracht werden und alle Variablen auf die andere Seite. Auf beiden Gleichungsseiten wird nun zuerst auf den Einerstäben je 1 graues, negatives x^2 aufgehängt. So hebt sich auf beiden Seiten je 1 rotes, positives x^2 gegen das 1 graue, negative x^2 auf und damit sind die quadratischen Variablen aus der Gleichung verschwunden. Übrig bleibt: $-2x - 15 = -6x + 9$
- **4. Schritt:** 2. Erweiterung der Gleichung (äquivalente Umformung) und Vereinfachung
Auf beiden Gleichungsseiten werden nun auf den Einerstäben 6 rote, positive x aufgehängt. Dann heben sich auf der rechten Gleichungsseite die 6 roten, positiven x gegen die 6 grauen, negativen x auf und werden abgehängt. Auf der linken Gleichungsseite heben sich 2 rote, positive x gegen 2 graue, negative x auf und es bleiben noch 4 rote, positive x auf dieser linken Gleichungsseite übrig. Die Gleichung sieht nun wie folgt aus: $+4x - 15 = +9$

- **5. Schritt:** 3. Erweiterung der Gleichung (äquivalente Umformung) und Vereinfachung
 Auf beiden Gleichungsseiten werden auf den Einerstäben je **5** rote, positive Einerkugeln und auf den Zehnerstäben je **1** rote, positive Zehnerkugel dazu gegeben. Somit heben sich auf der linken Gleichungsseite die Einer und Zehnerkugeln **rot** und **grau** gegenseitig auf und werden zur Seite geschoben. Auf der rechten Gleichungsseite addieren sich die **9** und **15** roten, positiven Kugeln zu **+ 24**. Die Gleichung heißt nun: **$4x = 24$**

- **6. Schritt:** Errechnen der Lösung für **$1x$**
24 geteilt durch **$4x$** ist **6** Lösung **$1x = 6$**
(diese Lösung ist mit dem Gleichungsrahmen nicht mehr darstellbar, aber Kinder die sich auf diesem Rechenniveau befinden sind in der Lage sich das im Kopf vorzustellen bzw. zu bearbeiten)

- **7. Schritt:** Probe machen zur Überprüfung der Lösung
 Für X wird die **+ 6** in die ausmultiplizierte Ausgangsgleichung eingesetzt
 $6^2 - (5 \cdot 6) + (3 \cdot 6) - 15 = 6^2 - (3 \cdot 6) - (3 \cdot 6) + 9$ und man erhält als Lösung **$9 = 9$** .

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Variablen

Lineare Gleichungssysteme sind Systeme aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen/Unbekannten.

Es gibt drei mathematische Lösungswege, um diese Gleichungen zu lösen:

- **Das Einsetzungsverfahren,**
- **das Gleichsetzungsverfahren und**
- **das Additionsverfahren.**

Mit diesem Rahmen kann man Gleichungssysteme mit dem Einsetzungsverfahren/ Substitutionsverfahren und dem Gleichsetzungsverfahren bearbeiten.

➤ **Das Einsetzungsverfahren**

Beispiel: Gleichung I. $y = -x + 2$

Gleichung II. $4x + 3y = 2$

- Eine der Gleichungen auf dem Rahmen darstellen und nach einer Variablen auflösen.
(Eventuell liegt eine gegebene Gleichung schon passend vor.)

$$y = -x + 2$$

- Den Term für diese Variable in die andere Gleichung einsetzen und Gleichung auf dem Rahmen darstellen.

$$4x + 3(-x + 2) = 2$$

- Die so entstandene Gleichung nach der Variablen x durch äquivalente Umformung auflösen.

$$x = 2 - 6$$
$$x = -4$$

- Die Lösung in die umgeformte I. Gleichung einsetzen und die andere Variable auf dem Rahmen berechnen.

$$y = -(-4) + 2$$
$$y = 6$$

- Lösung in eine der Gleichungen einsetzen und Ergebnis schriftlich oder am Rahmen überprüfen.

(empfehlenswert, um Fehlerquellen zu vermeiden, Zwischenschritte, wie z.B. die Einsetzung des Terms, schriftlich notieren)

➤ Das Gleichsetzungsverfahren

Beispiel: Gleichung I. $3x + y = 8$

Gleichung II. $2 + y = 2x$

- Beide Gleichungen nacheinander auf dem Rahmen aufbauen und durch Umformung nach der gleichen Variablen auflösen. (*Ergebnisse notieren*)

$$y = 8 - 3x$$

$$y = 2x - 2$$

- Die anderen Seiten der Gleichungen einander gleichsetzen und als eine Gleichung auf dem Rahmen darstellen.

$$8 - 3x = 2x - 2$$

- Löse die so entstandene Gleichung durch äquivalente Umformung nach der Variablen x auflösen.

$$10 = 5x$$

$$2 = x$$

- Setze die Lösung in eine der Gleichungen ein und berechne so die andere Variable am Gleichungsrahmen.

$$(3 \cdot 2) + y = 8$$

$$6 + y = 8$$

$$y = 8 - 6$$

$$y = 2$$

- Lösungen in eine der Gleichungen einsetzen und Ergebnis überprüfen.

(empfehlenswert, um Fehlerquellen zu vermeiden, Zwischenschritte, wie z.B. die Einsetzung des Terms, schriftlich notieren)